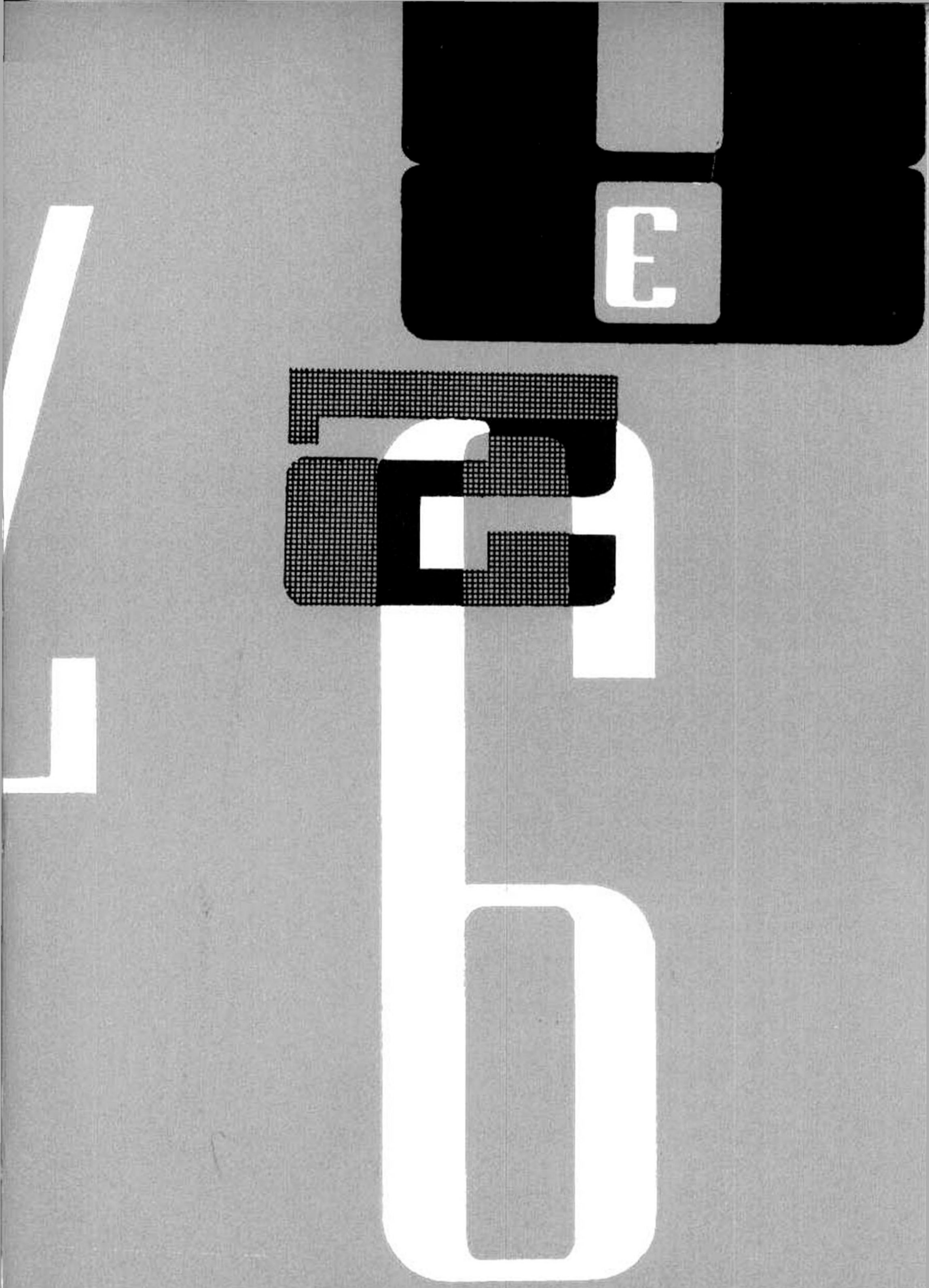
ALGORITMOS DE LAS OPERACIONES CON NUMEROS ENTEROS

4

National Council of Teachers of Mathematics

Temas
Colección de
matemáticas



4

Algoritmos de las operaciones con números enteros

National Council of
Teachers
of Mathematics
U.S.A.

traducción de
Federico Galván Anaya
profesor de matemáticas
de la U.N.A.M.

Editorial F. Trillas, S. A.
México 1967

Título de esta obra en inglés:
Topics in Mathematics for Elementary School Teachers
Booklet Number 4. Algorithms for Operations with Whole Numbers

Tercera reimpresión en inglés: 1965

Primera edición en español: 1967

Miembro de la Cámara Nacional de
la Industria Editorial. Reg. núm. 158

Impreso en México

Prefacio

Este cuaderno es uno de la serie de ocho, escrita para maestros de enseñanza elemental más bien que para sus alumnos. Cada cuaderno comprende la exposición de un tema básico de matemáticas. Estos temas se hallan entre los que el maestro de enseñanza elemental necesita dominar para tener una comprensión más cabal de la matemática que usualmente se enseña en la escuela de ese grado. Cada cuaderno es la introducción a un tema, no un tratado exhaustivo. El lector interesado debe estudiar el tema con mayor profundidad en otras obras.

Los temas escogidos son especialmente importantes para aquellos maestros que creen que las experiencias de aprendizaje, trasmitidas a los niños del ciclo elemental, deberían empezar por el desarrollo de algunos conceptos unificadores básicos en matemáticas. Muchos profesores han encontrado que su educación profesional no los prepara para enseñar aritmética de modo congruente con este punto de vista. Es el deseo de los autores y del NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) que esta serie de cuadernos pueda ser una ayuda para estos profesores, así como para otros que también están interesados en mejorar su instrucción.

Los títulos de los cuadernos de esta serie son:

Cuaderno 1. *Conjuntos*
Cuaderno 2. *Números enteros*
Cuaderno 3. *Sistemas de numeración para los números enteros*
Cuaderno 4. *Algoritmos de las operaciones con números enteros*
Cuaderno 5. *Números y sus factores*
Cuaderno 6. *Números racionales*
Cuaderno 7. *Sistemas de numeración para los números racionales*
Cuaderno 8. *Proposiciones numéricas*

Aconsejamos que, si es posible, los cuadernos sean leídos en el orden numérico correspondiente, con excepción del octavo (Proposiciones numéricas), que puede apartarse del orden citado.

Escribieron los cuadernos los miembros de un grupo de verano (Summer Writing Group) cuyos nombres se indican al final de este prefacio. El proyecto fue iniciado y patrocinado por el Comité Suplementario de Publicaciones del NCTM (The NCTM Supplementary Publications Committee) bajo la presidencia de Kenneth B. Henderson. Fue financiado por el NCTM.

EDWIN F. BECKENBACH
HELEN CURRAN
WALTER FLEMING
GERALDINE GREEN
LOLA MAY
MARLENE SCHROEDER
MARGARET F. WILLERDING
WILLIAM WOOTON
LENORE JOHN, *Coordinadora*

Indice

Algoritmos de las operaciones con números enteros

Cuaderno 4

INTRODUCCION

El original de un libro importante que describe el uso de los numerales indoarábigos, escrito por Al Khowarizmi * alrededor del año 825 d. C., desapareció; pero existe una traducción latina intitulada *Algorithmi de numero indorum,* en el que el nombre de Al Khowarizmi se latinizó como Algorithmi, y de éste se derivó el término acostumbrado en matemáticas, *algoritmo,* que se emplea para designar el procedimiento mediante el cual se resuelve una operación con dos números cuando el resultado no es evidente de inmediato.

Cuando efectuamos operaciones con dígitos o numerales de una cifra, recordamos las sumas y productos básicos, o tal vez recurramos al proceso de contar. Por otra parte, cuando efectuamos estas operaciones con números que tienen dos o más dígitos, usualmente recurrimos a un algoritmo, o proceso especial.

Puesto que el resultado de una operación, ya sea suma, sustracción, multiplicación o división, es un número y los números pueden representarse mediante conjuntos modelo, el número buscado puede obtenerse siempre me-

* Más que autores, los árabes fueron traductores, principalmente de los hindúes. De la pléyade que se nutrió en la matemática oriental, particularmente se distinguieron dos por la originalidad de sus trabajos. Uno de ellos, Mohammed Ibn Musa Al Khowarizmi, que vivió en el siglo IX en Bagdad, publicó un tratado por el año 825, sobre la trasposición de términos negativos para resolver ecuaciones. Aunque de antecedentes griegos o hindúes, manifiesta un original progreso en cuanto a la solución numérica de las ecuaciones. Afirman varios historiadores de la matemática, que se perdió una obra de este autor; pero otros consideran que sólo se perdieron algunos capítulos sobre los números hindúes, sin aclarar si éstos formaban parte de su obra más conocida: *Al-jebr w'almuquabala.*

En cuanto a la grafía del nombre de Mohammed, hay discrepancias porque mientras para unos es como queda dicho, para otros es Al-Khowarizmi o Al-Juarismi, y aun el nombre latinizado de Algorithmi, [N. del T.]

diante el simple proceso de contar. Aunque teóricamente esto constituye un método válido, la computación mediante el proceso de contar, excepto para casos muy simples, no es muy práctica. Prueba de esto es el hecho de que en las civilizaciones antiguas, siempre que se tenían que efectuar operaciones con números grandes, se recurría a instrumentos auxiliares como el ábaco.

Los auxiliares mecánicos, como el ábaco, se emplearon universalmente hasta que el sistema de notación posicional indoarábigo se empezó a usar. Con el uso del sistema indoarábigo la computación ya no dependió tanto de los medios mecánicos, puesto que el calculista podía combinar símbolos mediante el sistema indoarábigo y escribir los numerales del problema siguiendo un modelo y, por último, obtener el resultado correcto. Estos modelos de procedimiento se llaman algoritmos.

Los algoritmos que conocemos y usamos son productos del sistema de notación posicional y están íntimamente relacionados con el mismo. Las propiedades del sistema numérico (que en este cuaderno será el sistema de los números enteros) y el sistema de notación posicional, hacen posibles los algoritmos.

Los algoritmos tratados en este cuaderno no son los únicos posibles. Se registran cambios a través de los siglos que pueden seguir en lo futuro. El perfeccionamiento de los algoritmos trae como consecuencia un empleo más eficiente del sistema de numeración.

Términos empleados

Para facilitar la lectura y comprender mejor el contenido de este cuaderno, se recomienda, de manera especial, que el lector estudie primero el cuaderno 2, *Los números enteros,* y el cuaderno 3, *Sistemas de numeración para los números enteros.*

En matemáticas es fundamental que cada término empleado sea claramente entendido. Para asegurar que el lector comprenda el significado exacto de los términos empleados, se presenta el siguiente sumario con ejemplos.

Operación binaria

Una operación binaria es la que asocia un número definido con un par ordenado de números. La adición y la multiplicación son operaciones directas de la aritmética, y están definidas para *todos* los pares ordenados de números enteros. La sustracción y la división se llaman operaciones inversas, respectivamente, de la suma y multiplicación y también son operaciones binarias, pero no están definidas para todos los pares ordenados de números enteros. Por ejemplo, ni la sustracción ni la división asocian un número entero con el par ordenado (4, 15).

Operación	*Par ordenado*	*Número asociado*
Adición	(84, 42)	126
Multiplicación	(84, 42)	3 528
Sustracción	(84, 42)	42
División	(84, 42)	2

Numeral

Un numeral es un símbolo, o combinación de símbolos, que sirve de nombre para un número. El número diez, por ejemplo, tiene representaciones diferentes, o numerales, algunos de los cuales son:

$$10,\ 5\times 2,\ 8+2,\ 20-10,\ \frac{30}{3},\ (2\times 3)+4,\ 2\times(3+2).$$

El símbolo de igualdad, =, se usa comúnmente para indicar que dos numerales simbolizan el mismo número. Por tanto, el hecho de que los numerales 5×2 y $(2\times 3)+4$ sean el nombre del mismo número se expresa de la siguiente manera:

$$5\times 2=(2\times 3)+4.$$

Sistemas de numeración

Un sistema de numeración es un método de construir numerales para los números, mediante el uso de un conjunto de símbolos y un conjunto de reglas para combinar estos símbolos. Nuestro sistema de numeración decimal (de la palabra latina *decem,* que significa diez), o sistema base-diez, emplea exactamente diez símbolos:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Este sistema es de notación posicional porque el número representado por cada dígito en un numeral se determina por el dígito particular y su posición en el numeral. En nuestro sistema decimal el valor posicional de cada posición es diez veces mayor que el valor posicional de la posición que le sigue inmediatamente a la derecha. El valor posicional que corresponde a la posición que ocupa la extrema derecha del numeral (para un número entero) es el que tiene en sí, el dígito que ocupa esa posición, o sea el valor que tiene en el conjunto de los diez símbolos básicos.

Notación desarrollada

El número 4 036, por ejemplo, se representa en notación desarrollada mediante cualquiera de las siguientes formas:

$$\begin{aligned} 4\,036 &= (4\times 1\,000) + (0\times 100) + (3\times 10) + (6\times 1) \\ &= (4\times 10\times 10\times 10) + (0\times 10\times 10) + (3\times 10) + (6\times 1) \\ &= (4\times 10^3) + (0\times 10^2) + (3\times 10) + (6\times 1). \end{aligned}$$

Propiedades de la adición

Cerradura. El conjunto de los números enteros

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\},$$

es cerrado con respecto a la operación de adición. Con esto se indica que la suma de dos números enteros cualesquiera es un número entero.

Propiedad asociativa. La adición es una operación binaria; lo que quiere decir que se ejecuta tomando sólo dos números a la vez. La propiedad asociativa de la suma se relaciona con la suma de tres números. Ejemplos de esta propiedad,

$$(2+6)+7=2+(6+7);$$

esto es, los numerales $(2+6)+7$ y $2+(6+7)$ son representaciones que simbolizan el mismo número. En el primero de estos numerales el paréntesis indica que $(2+6)$ se considera como la representación de un número, 8; mientras que en el segundo, el paréntesis indica que $(6+7)$ se considerará como la representación de otro número, 13. Entonces:

$$\begin{aligned}(2+6)+7 &= 8+7 \\ &= 15,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}2+(6+7) &= 2+13 \\ &= 15.\end{aligned}$$

En ambos casos la suma es 15.

La propiedad asociativa puede aplicarse a sumas de más de tres números. Podemos probar, por ejemplo, que:

$$[(2+3)+4]+5=2+[(3+4)+5]$$

de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}[(2+3)+4]+5&=[5+4]+5\\&=9+5\\&=14,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}2+[(3+4)+5]&=2+[7+5]\\&=2+12\\&=14.\end{aligned}$$

La propiedad asociativa de la adición es, entonces, la que permite agrupar de varias maneras a los sumandos, sin que se altere la suma.

Propiedad conmutativa. La propiedad conmutativa de la adición permite cambiar el orden de dos sumandos sin que se altere el resultado. Entonces,

$$8+3=3+8,$$

y

$$182+11=11+182.$$

Elemento idéntico. El elemento idéntico para la suma es el número cero. Esto significa que la suma de cualquier número y cero. es el mismo número. Entonces,

$$5+0=5,$$

y

$$0+27=27.$$

Propiedades de la multiplicación

Cerradura. El conjunto de los números enteros es cerrado con respecto a la operación de la multiplicación. En otras palabras, el producto de dos números enteros cualesquiera es un número entero.

Propiedad asociativa. La multiplicación, al igual que la suma, es una operación binaria; esto es, se ejecuta sólo mediante dos números a la vez. La propiedad asociativa de la multiplicación se relaciona con el producto de tres números. De acuerdo con esta propiedad, por ejemplo,

$$(8\times9)\times6=8\times(9\times6).$$

En el numeral de la izquierda (8×9) se considera como la representación de un número, 72, y en el numeral de la derecha (9×6) se considera como la representación de un número, 54. Entonces,

$$\begin{aligned}(8\times9)\times6&=72\times6\\&=432,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}8\times(9\times6)&=8\times54\\&=432.\end{aligned}$$

Propiedad conmutativa. La multiplicación de números enteros es conmutativa; esto es, el producto de dos números no se altera si se cambia el orden de los mismos. Por ejemplo,

$$9\times7=7\times9.$$

Elemento idéntico. El elemento idéntico para la multiplicación es el número 1. Esto significa que el producto de cualquier número por 1, es el mismo número. Entonces,

$$\begin{aligned}6\times1&=6,\\1\times497&=497,\\1\times1&=1.\end{aligned}$$

Propiedad distributiva. La propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, o simplemente la propiedad distributiva, incluye tanto la multiplicación como la suma. De acuerdo con esta propiedad, por ejemplo:

$$5\times(12+7)=(5\times12)+(5\times7).$$

La expresión $5\times(12+7)$ indica que debe efectuarse primero la suma de 12 más 7 y después la multiplicación de dicha suma por 5:

$$\begin{aligned}5\times(12+7)&=5\times19\\&=95.\end{aligned}$$

La expresión $(5\times12+(5\times7)$ indica que se efectúen primero las multiplicaciones de 12 por 5 y de 7 por 5, y después se sumen estos dos productos:

$$\begin{aligned}(5\times12)+(5\times7)&=60+35\\&=95.\end{aligned}$$

Entonces se representa el mismo número mediante $5\times(12+7)$ y $(5\times12)+(5\times7)$.

En el ejemplo anterior, la multiplicación (por 5) se distribuye de izquierda a derecha (respecto a la suma $12 + 7$). Debido a la propiedad conmutativa de la multiplicación, también podemos distribuir de derecha a izquierda, como se ilustra en el siguiente ejemplo:

$$(7+20)\times 6=(7\times 6)+(20\times 6).$$

La multiplicación es distributiva también con respecto a sumas de tres o más sumandos:

$$5\times(4+8+3)=(5\times 4)+(5\times 8)+(5\times 3).$$

Además, la multiplicación es distributiva con respecto a la sustracción. Los siguientes ejemplos ilustran este hecho:

$$25\times(12-8)=(25\times 12)-(25\times 8),$$

porque $25\times(12-8)=25\times 4$

$$=100,$$

y $(25\times 12)-(25\times 8)=300-200$

$$=100.$$

Adición y sustracción como operaciones inversas

La sustracción es la operación inversa de la adición y viceversa. Examinemos los siguientes ejemplos:

$$(12-7)+7=12,$$
$$(39+14)-14=39.$$

Observe que en el primer ejemplo sumar 7 a $(12-7)$ tiene por efecto "deshacer" el acto de restar 7 de 12. En el segundo ejemplo, restar 14 de $(39+14)$ tiene el efecto de "deshacer" la suma de 14 más 39.

Multiplicación y división como operaciones inversas

Hemos dicho que las operaciones de dividir y multiplicar son inversas entre sí. Examinemos los siguientes ejemplos:

$$(12\times 7)\div 7=12,$$
$$(42\div 7)\times 7=42.$$

Recordemos, sin embargo, que la división entre cero no está definida. Es verdad que: $(0\times 12)\div 12=0$, pero $(12\times 0)\div 0$ y $(12\div 0)\times 0$ son expresiones que no tienen significado.

SÍMBOLOS DE AGRUPACIÓN (MARCAS DE PUNTUACIÓN MATEMÁTICA)

El numeral

$$\{[(6+2)+7]+8\}+(4\times 10)$$

es la representación de un número mediante la suma de otros dos. Sabemos que:

$$(4\times 10)=40.$$

Encontremos una expresión simple para el otro número:

$$\begin{aligned}\{[(6+2)+7]+8\} &= \{[8+7]+8\}\\ &= \{15+8\}\\ &= 23;\end{aligned}$$

por tanto, el número representado por

$$\{[(6+2)+7]+8\}+(4\times 10)$$

es

$$23+40,$$

o sea 63. Obsérvese que en el proceso de obtención del número representado por $\{[(6+2)+7]+8\}$, el símbolo de agrupación interior, en este caso ( ), se consideró primero, después el siguiente símbolo de agrupación [ ] y por último, { }. La simplificación se efectúa de adentro hacia afuera.

ALGORITMOS Y OPERACIONES

Es importante distinguir entre una operación binaria y el algoritmo de la operación. Una operación binaria asocia a un par ordenado de números, un número definido. Un algoritmo es un dispositivo o modelo empleado para obtener el número que la operación asocia al par de números dados.

La operación de suma asocia el par de números 84 y 42, al número 126. La operación de multiplicación asocia el mismo par al número 3 528. La operación de sustracción asocia ese par al número 42. La operación de división asocia ese par al número 2. Los procedimientos empleados para obtener los números 126, 3 528, 42 y 2 se llaman algoritmos.

En muchos casos (por ejemplo cuando ambos números se representan por numerales de un solo dígito) recordar de memoria una tabla de operaciones elementales o tenerla escrita es cuanto se necesita para obtener el número que la operación asocia al par dado. En general, se usa un algoritmo que se basa en *a)* las propiedades de los números enteros, y *b)* en las propiedades de un sistema de notación posicional.

ALGORITMO DE LA ADICION

Supongamos que tenemos a nuestra disposición *a)* la suma de cualquier par de miembros del conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; *b)* las propiedades del conjunto de los números enteros, y *c)* las propiedades de nuestro sistema de numeración.

Veamos qué propiedades se emplean cuando obtenemos el resultado de la suma de dos números. En otras palabras, veamos cómo puede justificarse el algoritmo de la adición.

Como primer ejemplo, consideremos la suma de 23 más 45. Sabemos, desde luego, que el resultado es 68; pero veamos cómo podemos obtener este resultado, debido a las propiedades conmutativa y asociativa (de la adición) y a la propiedad distributiva.

$$
\begin{aligned}
23+54 &= [(2\times 10)+(3\times 1)]+[(4\times 10)+(5\times 1)] && \text{Notación desarrollada} \quad (1)\\
&= [(2\times 10)+(3\times 1)]+[(5\times 1)+(4\times 10)] && \text{Propiedad conmutativa} \quad (2)\\
&= \{[(2\times 10)+(3\times 1)]+(5\times 1)\}+(4\times 10) && \text{Propiedad asociativa} \quad (3)\\
&= \{(2\times 10)+[(3\times 1)+(5\times 1)]\}+(4\times 10) && \text{Propiedad asociativa} \quad (4)\\
&= (4\times 10)+\{(2\times 10)+[(3\times 1)+(5\times 1)]\} && \text{Propiedad conmutativa} \quad (5)\\
&= [(4\times 10)+(2\times 10)]+[(3\times 1)+(5\times 1)] && \text{Propiedad asociativa} \quad (6)\\
&= [(4+2)\times 10]+[(3+5)\times 1] && \text{Propiedad distributiva} \quad (7)\\
&= (6\times 10)+(8\times 1) && \text{Sumas básicas} \quad (8)\\
&= 68 && \text{Notación posicional} \quad (9)
\end{aligned}
$$

Obsérvese que los pasos numerados (2), (3), (4), (5) y (6) justificados por las propiedades conmutativa y asociativa de la adición, se emplean con el propósito de obtener (2×10) y (4×10) de tal manera que estén uno junto al otro, y de obtener (3×1) y (5×1) también, de tal manera que estén uno junto al otro. Después, en el paso (7), se emplea la propiedad distributiva para "combinar" (2×10) y (4×10), y para "combinar" (3×1) y (5×1).

Cuando escribimos

$$
\begin{aligned}
23 &= (2\times 10)+(3\times 1)\\
\underline{45} &= \underline{(4\times 10)+(5\times 1)}\\
&= [(2+4)\times 10]+[(3+5)\times 1] && \text{Propiedad distributiva}\\
&= (6\times 10)+(8\times 1)\\
&= 68,
\end{aligned}
$$

se dan por supuestas la conmutatividad y asociatividad de la adición y sólo se muestra explícitamente la aplicación de la propiedad distributiva.

Ahora estamos listos para ver cómo avanzamos "entre bastidores" cuando escribimos el algoritmo de la suma de 23 y 45 de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} 23 \\ \underline{45} \\ 68 \end{array}$$

Al escribir los números 23 y 45 en el arreglo vertical $\begin{array}{r} 23 \\ \underline{45} \end{array}$, indicamos estar dispuestos para aplicar la propiedad distributiva. Después escribimos el numeral 8, encerrado en el círculo.

$$\begin{array}{r} 23 \\ \underline{45} \\ 8 \end{array}$$

De hecho, admitimos que $(3 \times 1) + (5 \times 1) = (3 + 5) \times 1$, o en términos tradicionales, que 3 unidades más 5 unidades igual a 8 unidades. La base para este paso es la propiedad distributiva. Finalmente escribimos el numeral 6, que vemos también encerrado en un círculo.

$$\begin{array}{r} 23 \\ \underline{45} \\ 68 \end{array}$$

Este paso puede justificarse mediante la propiedad distributiva:

$$(2 \times 10) + (4 \times 10) = (2+4) \times 10 = 6 \times 10.$$

Consideremos ahora el problema de sumar 18 y 9. Nuevamente las propiedades asociativa y conmutativa justifican nuestra partida directamente de la disposición vertical:

$$\begin{array}{rll} 18 = & (1 \times 10) + (8 \times 1) & \\ 9 = & \qquad\qquad\;\; (9 \times 1) & \\ \hline 18+9 = & (1 \times 10) + [(8+9) \times 1] & \text{Propiedad distributiva} \\ = & (1 \times 10) + (17 \times 1) & \text{Suma básica} \\ = & (1 \times 10) + [(1 \times 10) + (7 \times 1)] & \text{Notación desarrollada} \\ = & [(1 \times 10) + (1 \times 10)] + (7 \times 1) & \text{Propiedad asociativa} \\ = & [(1+1) \times 10] + (7 \times 1) & \text{Propiedad distributiva} \\ = & (2 \times 10) + (7 \times 1) & \text{Suma básica} \\ = & 27. & \text{Notación posicional} \end{array}$$

En seguida mostramos estos pasos sintetizándolos más:

$$
\begin{array}{rl}
18 = & 10+8 \\
9 = & \phantom{10+{}}9 \\
\hline
= & \overline{10+17} \\
= & 10+(10+7) \\
= & (10+10)+7 \\
= & 20+7 \\
= & 27
\end{array}
\qquad \text{ó} \qquad
\begin{array}{r}
1 \\
18 \\
9 \\
\hline
27.
\end{array}
$$

El ejemplo anterior muestra el hecho de llevar una decena. Se emplea el mismo método cuando se llevan centenas, millares, etc.

Verticalmente podemos abreviar todavía más. En el siguiente ejemplo se muestran tres formas abreviadas de la suma de 67 y 48.

$$
\begin{array}{rl}
67 & \\
48 & \\
\hline
15 & (8+7) \\
100 & (40+60) \\
\hline
115 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
10 \\
67 \\
48 \\
\hline
5 \\
\\
110 \\
\hline
115
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\\
\\
\left[\begin{array}{l} 8+7=15=(1\times 10)+5 \\ \text{“se lleva” } (1\times 10) \end{array}\right] \\
\\
(40+60+10)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1 \\
67 \\
48 \\
\hline
115
\end{array}
$$

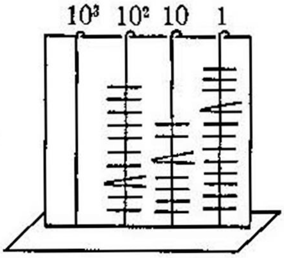
Un ábaco puede ser un auxiliar valioso que contribuye a la mejor comprensión del algoritmo de la adición. Cada alambre del ábaco corresponde a una posición en el numeral. El valor posicional se muestra en el ábaco dibujado en la figura 1. El número de rayas (bolitas del ábaco) indica el número señalado por el dígito de esa posición.

En la figura 1, se muestra la suma 723 y 248 efectuada en un ábaco.

La explicación del algoritmo de la adición de numerales en base diez, es la misma que con numerales de cualquier otra base numérica. Esto se demostrará usando la base cuatro.* El cuadro de suma y el de valores posicionales para numerales en base cuatro se muestran en los cuadros I y II.

* Para una explicación detallada del sistema de numeración en base cuatro, véase el cuaderno 3: *Sistemas de numeración para los números enteros.*

a)



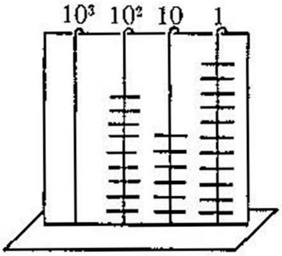
Las rayas (cuentas) se colocan de tal manera que muestren los sumandos 723 (arriba) y 248 (abajo).
Las "pinzas" $<$ se emplean para separar los grupos de rayas que simbolizan los dos sumandos.

Sumandos

$(7\times10^2)+(2\times10)+(3\times1)$

$(2\times10^2)+(4\times10)+(8\times1)$

b)

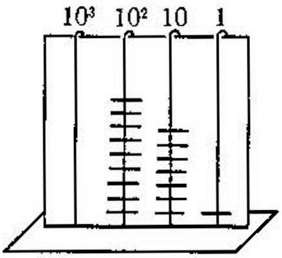


Aquí se quitan las "pinzas" para poder unir los conjuntos de rayas.

Suma

$(9\times10^2)+(6\times10)+(11\times1)$

c)



Diez de las rayas del alambre de la extrema derecha se quitan, y se agrega una raya al grupo del siguiente alambre (hacia la izquierda).

Nuevo nombre de la suma

$(9\times10^2)+(7\times10)+(1\times1)=971$

FIGURA 1

CUADRO I

Cuadro de suma en base cuatro				
+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

CUADRO II

Valor posicional en base cuatro		
cuatro^2 ó dieciséis	cuatro^1 ó cuatro	cuatro^0 ó uno

Considérese la suma $21_{\text{cuatro}} + 12_{\text{cuatro}}$.*

$$21_{\text{cuatro}} + 12_{\text{cuatro}} = [(2 \times \text{cuatro}) + (1 \times \text{uno})] + [(1 \times \text{cuatro}) + (2 \times \text{uno})]$$

Si se aplican las propiedades conmutativa y asociativa, obtenemos:

$[(2 \times \text{cuatro}) + (1 \times \text{cuatro})] + [(1 \times \text{uno}) + (2 \times \text{uno})]$	
$= [(2+1) \times \text{cuatro}] + [(1+2) \times \text{uno}]$	Propiedad distributiva
$= (3 \times \text{cuatro}) + (3 \times \text{uno})$	Sumas básicas
$= 33_{\text{cuatro}}$.	Notación posicional

Así que $21_{\text{cuatro}} + 12_{\text{cuatro}} = 33_{\text{cuatro}}$.

Puesto que el numeral en base cuatro, que simboliza al número cuatro es 10_{cuatro}, podemos escribir la suma del ejemplo anterior usando numerales en base cuatro, de la siguiente manera:

$$21_{\text{cuatro}} + 12_{\text{cuatro}} = [(2 \times 10_{\text{cuatro}}) + (1 \times 1_{\text{cuatro}})] + [(1 \times 10_{\text{cuatro}}) + (2 \times 1_{\text{cuatro}})]$$

y empleando nuevamente las propiedades conmutativa y asociativa,

$= [(2 \times 10_{\text{cuatro}}) + (1 \times 10_{\text{cuatro}})] + [(1 \times 1_{\text{cuatro}}) + (2 \times 1_{\text{cuatro}})]$	
$= [(2+1) \times 10_{\text{cuatro}}] + [(1+2) \times 1_{\text{cuatro}}]$	Propiedad distributiva
$= (3 \times 10_{\text{cuatro}}) + (3 \times 1_{\text{cuatro}})$	Sumas básicas
$= 33_{\text{cuatro}}$.	Notación posicional

Y empleando la familiar forma vertical tendremos:

$$\begin{array}{r} 21_{\text{cuatro}} \\ 12_{\text{cuatro}} \\ \hline 33_{\text{cuatro}}. \end{array}$$

Sumar 21_{cuatro} y 12_{cuatro} es simple, porque para esto se emplean únicamente las sumas básicas y el valor posicional, ya que las propiedades justifican las sumas de 2 cuatros y 1 cuatro para obtener la suma de 3 cuatros.

Consideremos un ejemplo de suma en base cuatro que implique el hecho de llevar. Trátese de identificar las propiedades que justifican el llevar un número al operar en una suma indicada.

* La palabra cuatro como subíndice indica que el número es de base cuatro y en este ejemplo no se debe leer veintiuno ni doce, sino dos uno, base cuatro, y uno dos, base cuatro. En lugar de emplear una palabra para la base se puede escribir el numeral correspondiente (en base diez) entre paréntesis, también como subíndice; por ejemplo: $21_{(4)}$ aunque en estos cuadernos no se emplea. [N. del T.]

$$12_{\text{cuatro}} + 13_{\text{cuatro}} = ?$$

$$\begin{aligned} 12_{\text{cuatro}} &= 10_{\text{cuatro}} + 2_{\text{cuatro}} \\ 13_{\text{cuatro}} &= 10_{\text{cuatro}} + 3_{\text{cuatro}} \\ \hline & \ 20_{\text{cuatro}} + 11_{\text{cuatro}} \end{aligned}$$

El ejemplo anterior ofrece la justificación de sumar las columnas como se muestra. Obtengamos ahora un nuevo nombre para $20_{\text{cuatro}} + 11_{\text{cuatro}}$:

$$20_{\text{cuatro}} + 11_{\text{cuatro}} = [(2\times \text{cuatro}) + (0\times \text{uno})] + [(1\times \text{cuatro}) + (1\times \text{uno})].$$

Aplicando las propiedades asociativa y conmutativa, obtenemos:

$$[(2\times \text{cuatro}) + (1\times \text{cuatro})] + [(0\times \text{uno}) + (1\times \text{uno})]$$

$= [(2+1)\times \text{cuatro}] + [(0+1)\times \text{uno}]$ Propiedad distributiva

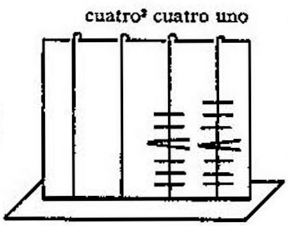
$= (3\times \text{cuatro}) + (1\times \text{uno})$ Sumas básicas

$= 31_{\text{cuatro}}$ Notación posicional

por tanto

$12_{\text{cuatro}} + 12_{\text{cuatro}} = 31_{\text{cuatro}}$.

a)



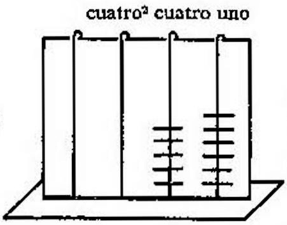
Las rayas (cuentas) se han colocado de tal manera que muestran los sumandos 23 (arriba) y 33 (abajo), las "pinzas", <, se emplean para separar los grupos de rayas que representan a los sumandos.

Sumandos

$(2\times \text{cuatro}) +$
$(3\times \text{uno})$

$(3\times \text{cuatro}) +$
$(3\times \text{uno})$

b)

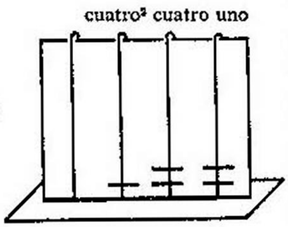


Ahora se quitan las "pinzas" y se unen los los dos conjuntos de rayas en cada alambre.

Suma

$(11_{\text{cuatro}}\times \text{cuatro}) +$
$(12_{\text{cuatro}}\times \text{uno})$

c)



Cuatro rayas del alambre de la extrema derecha se quitan, y se agrega una raya al grupo del alambre marcado con cuatro; de este alambre también se quitan cuatro rayas y se agrega una raya en el alambre marcado con cuatro².

Nueva expresión de la suma

$(1\times \text{cuatro}^2) +$
$(2\times \text{cuatro}) +$
$(2\times \text{uno}) = 122_{\text{cuatro}}$

FIGURA 2

Este ejemplo sugiere que en el método de "llevar" con numerales base cuatro, puede procederse de la manera conocida. Entonces,

$$\begin{array}{r} ① \\ 12_{\text{cuatro}} \\ \underline{13_{\text{cuatro}}} \\ 31_{\text{cuatro}} \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{r} ① \\ 23_{\text{cuatro}} \\ \underline{33_{\text{cuatro}}} \\ 122_{\text{cuatro}} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 3+3=12_{\text{cuatro}} \\ 1+2+3=12_{\text{cuatro}}. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(de la tabla de} \\ \text{sumar)} \end{array}$$

La suma de 23_{cuatro} y 33_{cuatro} efectuada en un ábaco se muestra en la figura 2.

Grupo de ejercicios 1

La mayoría de la gente sabe que se puede comprobar un problema de suma como:

$$\begin{array}{r} 3 \\ 4 \\ \underline{5} \\ 12 \end{array}$$

sumando en la columna hacia arriba y después sumando hacia abajo; esto se comprueba por el hecho de que:

$$(5 + 4) + 3 = (3 + 4) + 5.$$

(sumando hacia arriba) (sumando hacia abajo)

Llene los espacios en blanco expresando la razón de cada paso en la prueba.

1. $(5 + 4) + 3 = 5 + (4 + 3)$ ______________
2. $= (4 + 3) + 5$ ______________
3. $= (3 + 4) + 5$ ______________

Obtenga las siguientes sumas de base cuatro:

4. $\begin{array}{r} 32_{\text{cuatro}} \\ \underline{21_{\text{cuatro}}} \end{array}$

5. $\begin{array}{r} 31_{\text{cuatro}} \\ \underline{23_{\text{cuatro}}} \end{array}$

6. $\begin{array}{r} 12_{\text{cuatro}} \\ 23_{\text{cuatro}} \\ \underline{33_{\text{cuatro}}} \end{array}$

ALGORITMO DE LA SUSTRACCION

La operación de *adición* asocia a un par de números un número específico, llamado suma. La operación de encontrar uno de los dos sumandos cuando se conoce el otro sumando y la suma, se llama *sustracción.* La sustracción es la inversa de la operación de adición; o sea, la sustracción "deshace" la adición.

Los ejemplos del cuadro III indican, de acuerdo con la definición de la resta, que es posible emplear las sumas básicas en la sustracción así como en la adición.

Para justificar el algoritmo de la sustracción, observemos una propiedad sugerida por los ejemplos siguientes. ¿Son verdaderos los enunciados?

a) $(8+6)-(3+2)=(8-3)+(6-2)$
$$14-5=5+4$$

b) $(7+11)-(6+9)=(7-6)+(11-9)$
$$18-15=1+2$$

c) $(25+8)-(14+8)=(25-14)+(8-8)$
$$33-22=11+0$$

CUADRO III

Adición					*Sustracción*				
Sumando		*Sumando*		*Suma*	*Suma*		*Sumando*		*Sumando desconocido*
6	+	4	=	10	10	−	4	=	6
					10	−	6	=	4
9	+	6	=	15	15	−	9	=	6
					15	−	6	=	9
a	+	b	=	c	c	−	b	=	a
					c	−	a	=	b

En general, la conclusión a que llegamos al estudiar los ejemplos anteriores se puede escribir de la siguiente manera:

$$\text{Si } a \geq c^* \text{ y } b \geq d, \text{ entonces } (a+b)-(c+d)=(a-c)+(b-d).$$

Llamaremos a esto el enunciado de una propiedad de la sustracción. Aceptaremos esta propiedad de la sustracción como verdadera, ya que puede probarse; pero la prueba está más allá del alcance de este cuaderno. Esta propiedad se emplea casi en todos los ejemplos de sustracción. Obsérvese su empleo en los siguientes ejemplos:

* $a \geq c$ se lee "a es mayor o igual a c". La proposición $6 \geq 5$ es verdadera porque $6 > 5$. La proposición $5 \geq 5$ es verdadera porque $5=5$.

$$\begin{aligned}
76-23 &= (70+6)-(20+3)\\
&=(70-20)+(6-3)\\
&=50+3\\
&=53
\end{aligned}$$

Ahora consideremos la forma en la que ésta y otras propiedades de los números enteros y del sistema de numeración, nos aseguran que el algoritmo conocido de la sustracción es razonable. Deseamos obtener (78-32).

$$\begin{aligned}
78-32 &= [(7\times 10)+(8\times 1)]-[(3\times 10)+(2\times 1)] \\
&= [(7\times 10)-(3\times 10)]+[(8\times 1)-(2\times 1)] && \text{Propiedad de la sustracción}\\
&= [(7-3)\times 10]+[(8-2)\times 1] && \text{Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la sustracción.}\\
&= (4\times 10)+(6\times 1)\\
&= 46
\end{aligned}$$

En el siguiente ejemplo tenemos un caso en el que se requiere el proceso que a veces llamamos *pedir prestada una unidad* o *tomar una unidad.* Si intentamos emplear el método del ejemplo anterior para obtener $(88-49)$, tropezaremos con dificultades, porque no podemos restar 9 unidades de 8 unidades. El número 88 puede descomponerse en 7 decenas y 18 unidades como se demuestra enseguida.

$$\begin{aligned}
88 &= (88\times 10)+(8\times 1)\\
&= [(7+1)\times 10]+(8\times 1)\\
&= [(7\times 10)+(1\times 10)]+(8\times 1) && \text{Propiedad distributiva}\\
&= (7\times 10)+[(1\times 10)+(8\times 1)] && \text{Propiedad asociativa}\\
&= (7\times 10)+[(10\times 1)+(8\times 1)] && \text{Propiedad conmutativa de la multiplicación}\\
&= (7\times 10)+[(10+8)\times 1] && \text{Propiedad distributiva}\\
&= (7\times 10)+(18\times 1).
\end{aligned}$$

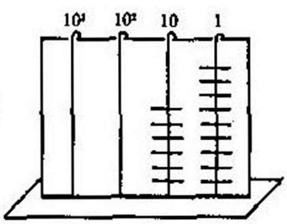
Por tanto, al restar 49 de 88 se puede proceder como sigue:

$$\begin{aligned}
88-49 &= [(7\times 10)+(18\times 1)]-[(4\times 10)+(9\times 1)]\\
&= [(7\times 10)-(4\times 10)]+[(18\times 1)-(9\times 1)] && \text{Propiedad de la sustracción}\\
&= [(7-4)\times 10]+[(18-9)\times 1] && \text{Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la sustracción}\\
&= (3\times 10)+(9\times 1)\\
&= 39.
\end{aligned}$$

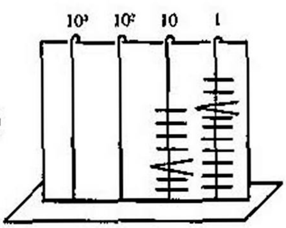
Analizando el proceso anterior, vemos que se aplica un nuevo nombre; esto es, se expresa de otro modo un número, de tal manera que haya suficientes unidades y decenas, que satisfagan las condiciones de que $(a\geq c)$ y $(b\geq d)$. La vieja expresión "tomando una decena" implica que la pagaremos después; pero nunca pagamos esa decena, porque lo que ocurre en realidad es que expresamos el número de la manera más conveniente para el cálculo. La propiedad distributiva nos permite restar decenas de decenas y unidades de unidades. El ejemplo anterior nos muestra la forma de expresar una decena de otra manera (en términos de unidades). De igual modo, podemos expresar centenas, millares, etc.

Considérese, como segundo ejemplo, restar 67 de 324. Claro que no podemos restar 7 unidades de 4 unidades; por eso, en primer lugar, tenemos que expresar 324 como 3 centenas, 1 decena y 14 unidades. Observamos la imposibilidad de restar 6 decenas de 1 decena, por lo que otra vez tenemos que expresar 324 de distinta forma: 2 centenas, 11 decenas y 14 unidades. La sustracción puede efectuarse ahora:

$$\begin{array}{rl} 324= & (2\times 10^2)+(11\times 10)+(14\times 1) \\ 67= & \qquad\qquad\quad (6\times 10)+(7\times 1) \\ \hline & (2\times 10^2)+[(11-6)\times 10]+[(14-7)\times 1] \\ & =(2\times 10^2)+(5\times 10)+(7\times 1) \\ & =257. \end{array}$$

a) 

$69=(6\times 10)+(9\times 1)$
La suma * (minuendo) 69, se muestra en el ábaco.

b) 

Sumando conocido $42=(4\times 10)+(2\times 1)$
Sumando desconocido $27=(2\times 10)+(7\times 1)$
Las rayas (cuentas) que representan la suma 69, están separadas por las "pinzas", $<$, para mostrar el sumando conocido, 42, y el sumando desconocido, 27.

FIGURA 3

* Con el propósito de insistir en la relación inversa que hay entre la resta y la suma, los autores emplean términos propios de esta segunda operación para designar las partes de la primera, porque, como sabemos, la resta es la inversión del sentido de la suma; es como *desandar* en aquélla el camino de ésta. Así, frecuentemente aquí al *minuendo* se le llama *suma;* al *sustraendo, sumando conocido,* y a la diferencia, o resta, *sumando desconocido.* [N. del T.]

El ábaco puede emplearse para representar la nueva expresión de la suma (minuendo) en la sustracción. En la figura 3, se expone la resta: 69 menos 42.

Ahora consideremos $328-49=n$ (figura 4).

La resta de números simbolizados por numerales de otra base implica la misma definición de sustracción y el mismo número de propiedades que empleamos con los numerales del sistema decimal. Cuando se restan números simbolizados por numerales de base cuatro, es necesario referirse a las sumas básicas en numerales de base cuatro, mostradas en el cuadro IV.

CUADRO IV

$+$	0_{cuatro}	1_{cuatro}	2_{cuatro}	3_{cuatro}
0_{cuatro}	0_{cuatro}	1_{cuatro}	2_{cuatro}	3_{cuatro}
1_{cuatro}	1_{cuatro}	2_{cuatro}	3_{cuatro}	10_{cuatro}
2_{cuatro}	2_{cuatro}	3_{cuatro}	10_{cuatro}	11_{cuatro}
3_{cuatro}	3_{cuatro}	10_{cuatro}	11_{cuatro}	12_{cuatro}

Debemos conocer también la relación entre las sumas básicas y la sustracción. Por ejemplo:

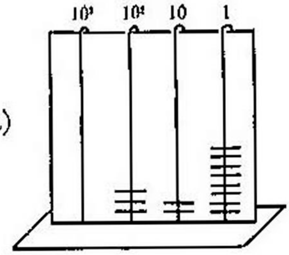
$$2_{\text{cuatro}}+3_{\text{cuatro}}=11_{\text{cuatro}}\begin{cases}11_{\text{cuatro}}-3_{\text{cuatro}}=2_{\text{cuatro}}\\ 11_{\text{cuatro}}-2_{\text{cuatro}}=3_{\text{cuatro}}\end{cases}$$

$$3_{\text{cuatro}}+1_{\text{cuatro}}=10_{\text{cuatro}}\begin{cases}10_{\text{cuatro}}-3_{\text{cuatro}}=1_{\text{cuatro}}\\ 10_{\text{cuatro}}-1_{\text{cuatro}}=3_{\text{cuatro}}.\end{cases}$$

Obtengamos $33_{\text{cuatro}}-21_{\text{cuatro}}$. Puesto que todos los numerales están en base cuatro, omitiremos los subíndices para simplificar la notación. Recuérdese que 10 es el símbolo de cuatro en base cuatro.

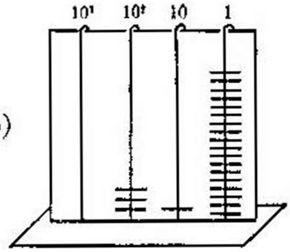
$$\begin{array}{ll}
33-21=[(3\times 10)+(3\times 1)]-[(2\times 10)-(1\times 1)] & \\
\quad =[(3\times 10)-(2\times 10)]+[(3\times 1)-(1\times 1)] & \text{Propiedad de la sustracción} \\
\quad =[(3-2)\times 10]+[(3-1)\times 1] & \text{Propiedad distributiva de la} \\
\quad =(1\times 10)+(2\times 1) & \text{multiplicación con res-} \\
\quad =12. & \text{pecto a la sustracción.}
\end{array}$$

En el siguiente ejemplo, restar 13_{cuatro} de 32_{cuatro} implica expresar en forma diferente un número para cumplir con la condición de la propiedad a)



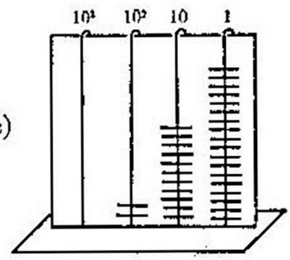
La suma 328 se expresa como $(3\times10^2)+(2\times10)+(8\times1)$.

b)



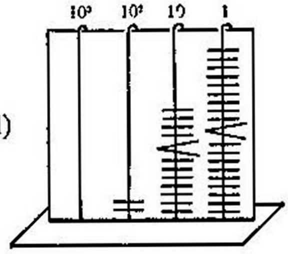
La suma 328 se expresa también $(3\times10^2)+(1\times10)+(18\times1)$ para obtener la condición $b\geqq d$.

c)



La suma 328 se expresa asimismo de otra forma: $(2\times10^2)+(11\times10)+(18\times1)$ para cumplir las condiciones $a\geqq c$ y $b\geqq d$.

d)



La suma está separada: sumando conocido $49=(4\times10)+(9\times1)$. Sumando desconocido $(2\times10^2)+(7\times10)+(9\times1)=279$.

FIGURA 4

de la sustracción, que es $a \geq c$ y $b \geq d$. Puesto que todos los numerales están en base cuatro, nuevamente omitiremos los subíndices.

El número 32 puede expresarse $(2\times 10)+(12\times 1)$, puesto que

$32=(3\times 10)+(2\times 1)$	
$=[(2+1)\times 10]+(2\times 1)$	
$=[(2\times 10)+(1\times 10]+(2\times 1)$	Propiedad distributiva
$=(2\times 10)+[(1\times 10)+(2\times 1)]$	Propiedad asociativa
$=(2\times 10)+[(10\times 1)+(2\times 1)]$	Propiedad conmutativa de la multiplicación
$=(2\times 10)+(12\times 1).$	Propiedad distributiva

Entonces al restar 13_{cuatro} de 32_{cuatro} se procede de la manera siguiente:

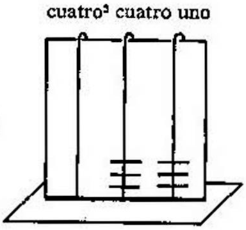
$32-13=[(2\times 10)+(12\times 1)]-[(1\times 10)+(3\times 1)]$	
$=[(2\times 10)-(1\times 10)]+[(12\times 1)-(3\times 1)]$	Propiedad de la sustracción
$=[(2-1)\times 10]=[(12-3)\times 1]$	Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la sustracción
$=(1\times 10)+(3\times 1)$	$12-3=3$, puesto que en numerales base cuatro $3+3=12$.
$=13.$	

Ahora podemos ver el problema en su fase siguiente:

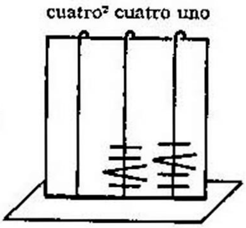
$$\begin{array}{r} 32=20+12 \\ 13=\underline{10+\ 3} \\ 10+\ 3 \\ =13. \end{array}$$

El procedimiento de expresar un número de manera diferente y mostrar el cálculo en el sistema de base cuatro, puede ilustrarse también en un ábaco, como se hace en el sistema de base diez; pero cambia el valor posicional de las posiciones representadas por los alambres.

Consideremos la resta $33_{\text{cuatro}}-21_{\text{cuatro}}$ (figura 5):



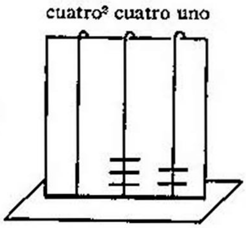
a) La suma 33_{cuatro} se presenta como $(3\times\text{cuatro})+(3\times1)$.



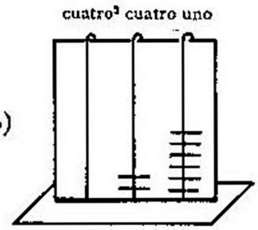
b) Ahora se separa la suma 33_{cuatro} de tal manera que muestre el sumando conocido $(2\times\text{cuatro})+(1\times1)$ y el sumando desconocido $(1\times\text{cuatro})+(2\times1)$.

FIGURA 5

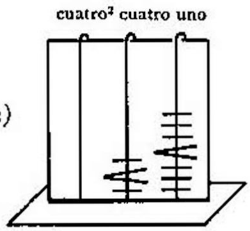
Ahora consideremos el ejemplo: $32_{\text{cuatro}}-13_{\text{cuatro}}=n$ (figura 6):



a) La suma 32_{cuatro} se presenta como $(3\times\text{cuatro})+(2\times1)$.



b) Ahora, la suma 32_{cuatro} se expresa de la siguiente manera: $(2\times\text{cuatro})+(\text{seis}\times1)$ para cumplir las condiciones: $a\geq c$ y $b\geq d$.



c) Aquí se separa la suma de tal manera que se distingan el sumando conocido 13_{cuatro} y el sumando desconocido 13_{cuatro}.

FIGURA 6

Grupo de ejercicios 2

Efectúe las siguientes sustracciones de numerales de base cuatro.

1. $\begin{array}{r} 32_{\text{cuatro}} \\ \underline{21_{\text{cuatro}}} \end{array}$
2. $\begin{array}{r} 31_{\text{cuatro}} \\ \underline{12_{\text{cuatro}}} \end{array}$
3. $\begin{array}{r} 301_{\text{cuatro}} \\ \underline{122_{\text{cuatro}}} \end{array}$
4. $\begin{array}{r} 100_{\text{cuatro}} \\ \underline{23_{\text{cuatro}}} \end{array}$
5. $\begin{array}{r} 200_{\text{cuatro}} \\ \underline{33_{\text{cuatro}}} \end{array}$

ALGORITMO DE LA MULTIPLICACION

El algoritmo de la multiplicación de un número por diez, es muy sencillo: se agrega un cero al correspondiente numeral de base diez. Por ejemplo:

$$10 \times 319 = 3\,190.$$

Este cómodo algoritmo puede justificarse mediante las propiedades de los números enteros y las propiedades del sistema de notación posicional. Aprovechemos el ejemplo 10×319:

$10 \times 319 = 319 \times 10$	Propiedad conmutativa de la multiplicación
$= [(3 \times 10^2) + (1 \times 10) + (9 \times 1)] \times 10$	Notación desarrollada
$= [(3 \times 10^2) \times 10] + [(1 \times 10) \times 10] + [(9 \times 1) \times 10]$	Propiedad distributiva
$= [3 \times (10^2 \times 10)] + [1 \times (10 \times 10)] + [9 \times (1 \times 10)]$	Propiedad asociativa de la multiplicación
$= (3 \times 10^3) + \ 1 \times 10^2) + (9 \times 10)$	$10^2 \times 10 = 10^3$; $10 \times 10 = 10^2$
$= (3 \times 10^3) + (1 \times 10^2) + (9 \times 10) + (0 \times 1)$	$0 \times 1 = 0$, y cero es el elemento idéntico para la suma
$= 3\,190.$	Notación posicional

La multiplicación de un número por cien se efectúa agregando dos ceros al numeral que corresponde en base diez. Cuando se multiplica por mil se agregan tres ceros, y así sucesivamente. Por tanto:

$$10 \times 319 = 3\,190$$
$$100 \times 319 = 31\,900$$
$$1\,000 \times 319 = 319\,000$$

etcétera.

Ahora apliquemos las propiedades de la multiplicación para comprobar el algoritmo de la misma, por cuyo medio se obtiene el producto de un par de números enteros, cuando éstos son tales que no podemos obtener de memoria su producto. Obviamente, saber que $a \times b$ es el número de elementos en un arreglo a por b, es de poca ayuda si estamos interesados en calcular 68×23. Puesto que son muchos elementos para retenerlos. Pero podemos hacer uso de las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación y de las propiedades especiales del 0 como sumando y como factor; del 1 también como factor y de las sumas básicas y productos, para auxiliarnos en nuestro cálculo. Si alguna vez se trata de multiplicar dos números, aunque sean pequeños, representados por numerales del sistema romano se apreciará en cuanto vale nuestro sistema posicional. Trátese de efectuar la siguiente multiplicación $(\mathrm{XVII}) \times (\mathrm{DCXI})$. Las propiedades de los números no dependen del sistema de numeración que usamos para simbolizarlos, pero al efectuar un cálculo frecuentemente necesitamos de él.

El algoritmo de la multiplicación que comúnmente empleamos, con frecuencia encubre lo que ocurre matemáticamente "entre bastidores". Veamos qué es lo que en realidad sucede al obtener el resultado (la representación más simple) del producto 6×29.

$$
\begin{aligned}
6 \times 29 &= 6 \times [(2 \times 10) + (9 \times 1)] && \\
&= [6 \times (2 \times 10)] + [6 \times (9 \times 1)] && \text{Propiedad distributiva} \\
&= [(6 \times 2) \times 10] + [(6 \times 9) \times 1] && \text{Propiedad asociativa} \\
&= (12 \times 10) + (54 \times 1) && \text{Productos básicos} \\
&= 120 + (54 \times 1) && \text{Multiplicación de 12 por diez} \\
&= 120 + 54 && \text{Multiplicación de 54 por uno} \\
&= 174. && \text{Algoritmo de la adición}
\end{aligned}
$$

Ahora examinemos qué sucede cuando obtenemos el producto de dos números compuestos por dos dígitos cada uno:

$$
\begin{aligned}
36 \times 79 &= (30 + 6) \times 79 && \\
&= (30 \times 79) + (6 \times 79) && \text{Propiedad distributiva} \\
&= [(10 \times 3) \times 79] + (6 \times 79) && \\
&= [10 \times (3 \times 79)] + (6 \times 79) && \text{Propiedad asociativa} \\
&= (10 \times 237) + (6 \times 79) && 3 \times 79 = 237\ * \\
&= 2\,370 + 474 && \text{Multiplicación por diez} \\
& && 6 \times 79 = 474\ * \\
&= 2\,844. && \text{Algoritmo de la adición}
\end{aligned}
$$

* La multiplicación por un numeral que tiene un solo dígito queda comprobada en el ejemplo anterior al efectuar el producto 6×29.

Es conveniente analizar este procedimiento en una disposición vertical:

$$\begin{array}{r|l} 79 & \\ 36 & \\ \hline 474 & =6\times 79 \\ 2\,370 & =30\times 79 \\ \hline 2\,844 & =\overline{(30+6)}\times 79. \end{array}$$

Si se borra todo lo que está a la derecha de la línea vertical, lo que sobra es el algoritmo comúnmente empleado, excepto porque el dígito 0 se omite generalmente del numeral 2 370.

Otra forma de ver el producto 36×79 es la siguiente:

$$\begin{aligned} 36\times 79 &= (30+6)\times(70+9) \\ &= [30\times(70+9)]+[6\times(70+9)] && \text{Propiedad distributiva} \\ &= (30\times 70)+(30\times 9)+(6\times 70)+(6\times 9) && \text{Propiedad distributiva} \\ &= 2\,100+270+420+54 \\ &= 2\,844. \end{aligned}$$

Obsérvese que hay cuatro productos que intervienen, es decir, los productos de cada uno de los números 70 y 9 por cada uno de los números 30 y 6. En una disposición vertical estos productos pueden mostrarse como sigue.

$$\begin{array}{rl} 79 & \\ 36 & \\ \hline 54 & =6\times 9 \\ 420 & =6\times 70 \\ 270 & =30\times 9 \\ 2\,100 & =30\times 70 \\ \hline 2\,844 & \end{array}$$

Es fácil comprobar que $6\times 70=420$ y que $30\times 70=2\,100$. Examinemos el último de estos dos productos:

$$\begin{aligned} 30\times 70 &= (3\times 10)\times(7\times 10) \\ &= [(3\times 10)\times 7]\times 10 && \text{Propiedad asociativa} \\ &= [7\times(3\times 10)]\times 10 && \text{Propiedad conmutativa} \\ &= [(7\times 3)\times 10]\times 10 && \text{Propiedad asociativa} \\ &= 21\times(10\times 10) && \text{Propiedad asociativa} \\ &= 2\,100 && \text{Multiplicación por cien} \end{aligned}$$

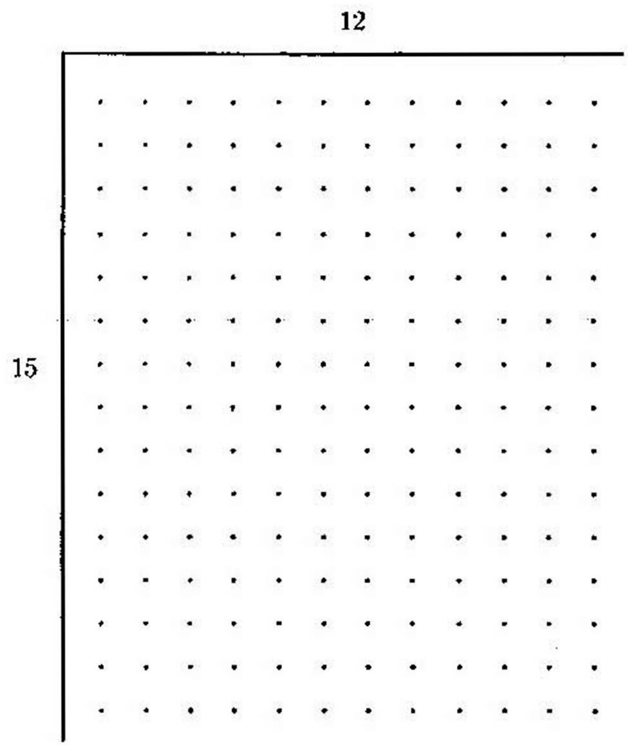


Figura 7

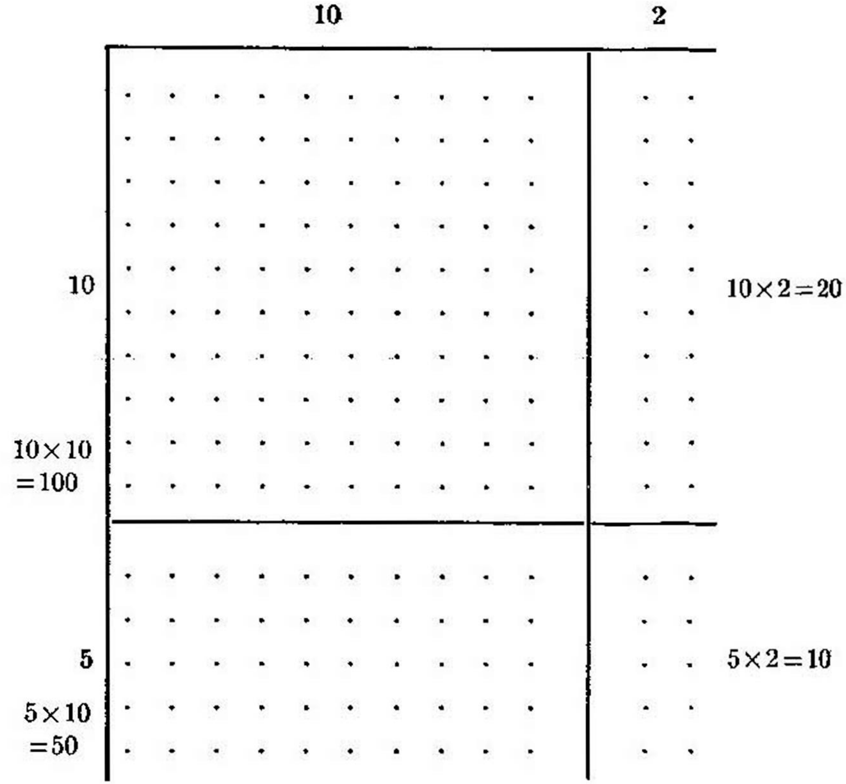


Figura 8

Es interesante tratar el producto de 15×12 fundándonos en la definición de producto, con el número de elementos en un arreglo de 15 renglones con 12 elementos en cada renglón, y ver cómo nuestro algoritmo se refleja en el arreglo (figura 7). Para esto, descomponemos el arreglo en varios arreglos menores (figura 8).

Los cuatro arreglos que se muestran en la figura 8 son los cuatro productos parciales que resultan al aplicar la propiedad distributiva.

$$
\begin{array}{rll}
12 & & \\
\underline{15} & & \\
10 & (5\times 2) & \multirow{2}{*}{} \\
50 & (5\times 10) & \left.\right\} (5\times 12) \\
20 & (10\times 2) & \\
\underline{100} & (10\times 10) & \left.\right\} (10\times 12) \\
180 & &
\end{array}
$$

Grupo de ejercicios 3

A continuación se prueba que $3+3=2\times 3$. Llene los espacios en blanco expresando la razón de cada paso de la prueba.

1. $3+3=(3\times 1)+(3\times 1)$ ____________
2. $3+3=3\times(1+1)$ ____________
3. $3+3=3\times 2$ ____________
4. $3+3=2\times 3$ ____________

A continuación se prueba que $(4+4)+4=3\times 4$. Llene los espacios en blanco exponiendo la razón de cada paso de la prueba.

5. $(4+4)+4=[(4\times 1)+(4\times 1)]+4$ ____________
6. $(4+4)+4=[4\times(1+1)]+4$ ____________
7. $(4+4)+4=(4\times 2)+4$ ____________
8. $(4+4)+4=(4\times 2)+(4\times 1)$ ____________
9. $(4+4)+4=4\times(2+1)$ ____________
10. $(4+4)+4=4\times 3$ ____________
11. $(4+4)+4=3\times 4$ ____________

A continuación se prueba que $(3\times 4)\times 5=4\times(5\times 3)$. Llene los espacios en blanco con la razón de cada paso de la prueba.

12. $(3\times4)\times5=(4\times3)\times5$ ________________
13. $(3\times4)\times5=4\times(3\times5)$ ________________
14. $(3\times4)\times5=4\times(5\times3)$ ________________

A continuación se prueba que $(2\times6)+(6\times4)=6\times(4+2)$. Llene los espacios en blanco con la razón de cada paso de la prueba.

15. $(2\times6)+(6\times4)=(6\times2)+(6\times4)$ ________________
16. $(2\times6)+(6\times4)=6\times(2+4)$ ________________
17. $(2\times6)+(6\times4)=6\times(4+2)$ ________________

ALGORITMO DE LA DIVISION

El algoritmo de la división es el más complejo y el que ofrece problemas más arduos en los procedimientos de cálculo básico.

Las cuatro operaciones fundamentales: adición, sustracción, multiplicación y división, están relacionadas de muchas maneras. La figura 9 muestra algunas de estas relaciones:

$$
\begin{array}{ccc}
 & \text{inversa} & \\
\text{Adición} & \longleftrightarrow & \text{Sustracción} \\
\text{repetida} \uparrow & \text{inversa} & \uparrow \text{repetida} \\
\text{Multiplicación} & \longleftrightarrow & \text{División}
\end{array}
$$

FIGURA 9

La relación horizontal indicada en la figura 9 es la relación inversa. (Véase cuaderno 2, *Los números enteros.*) Entonces,

$$2+3=5 \text{ tiene como inversa } 5-3=2 \text{ y } 5-2=3,$$
$$2\times3=6 \text{ tiene como inversa } 6\div3=2 \text{ y } 6\div2=3.$$

Un producto puede interpretarse como una adición de sumandos iguales. Considérese el producto:

$$
\begin{aligned}
2\times3 &= (1+1)\times3 && \text{Suma básica} \\
&= (1\times3)+(1\times3) && \text{Propiedad distributiva} \\
&= 3+3.
\end{aligned}
$$

Existe una relación semejante entre la sustracción y la división. Partiendo de 6, se sugieren tres restas sucesivas de 2 para obtener como residuo 0.

$$\begin{array}{r} 6 \\ -\underline{2} \\ 4 \\ -\underline{2} \\ 2 \\ -\underline{2} \\ 0 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{r} 1 \\ \\ 1 \\ \\ 1 \end{array}\right\} 3 \qquad \begin{array}{l} 6=(1\times 2)+4 \\ \\ 6=(1\times 2)+[(1\times 2)+2] \\ \\ 6=(1\times 2)+(1\times 2)+(1\times 2)+0 \end{array}$$

La operación de dividir puede efectuarse sólo con ciertos pares ordenados de números enteros. Por ejemplo $6\div 2$ es el número entero 3, porque $2\times 3=6$; pero $8\div 3$ no representa un número entero, porque no hay número entero que, multiplicado por 3, resulte 8.

No obstante, podemos relacionar de alguna manera cualquier par ordenado de números enteros (si el segundo no es cero) mediante la operación de dividir. Por ejemplo, dados los números enteros 15 y 7, podemos expresar 15 como un múltiplo de 7 más un residuo de 1:

$$15=(7\times 2)+1.$$

Este enunciado matemático ejemplifica la *propiedad de la división de los números*. La propiedad (o algoritmo) puede deducirse de las suposiciones básicas acerca de los números enteros, pero la aceptaremos aquí sin probarla.

En general, la propiedad de la división expresa el hecho de que para dos números enteros cualesquiera a y b, existe un par único de números enteros q y r tal que

$$a=(b\times q)+r,$$

donde $r\geq 0$; pero $r<b$. Decimos que q es el cociente y r es el residuo cuando el número a se ha dividido entre el número b.

La propiedad de la división de números se demuestra el cuadro V para varios pares de números enteros dados.

CUADRO V

Par ordenado (a, b)	$a=(b\times q)+r$	q	r
(12, 5)	$12=(5\times 2)+2$	2	2
(26, 4)	$26=(4\times 6)+2$	6	2
(81, 7)	$81=(7\times 11)+4$	11	4
(26, 13)	$26=(13\times 2)+0$	2	0
(125, 15)	$125=(15\times 8)+5$	8	5
(7, 18)	$7=(18\times 0)+7$	0	7

Examinemos un ejemplo para ilustrar esta propiedad de la división. Supóngase que deseamos obtener $40 \div 5$. Puesto que $5 \times 8 = 40$, sabemos que $40 \div 5 = 8$. Para ilustrar esto mediante arreglos, podemos disponer 40 elementos en un arreglo de 5 renglones (o columnas) en un número igual de elementos en cada renglón o (columna).

Supongamos ahora que deseamos obtener el número para el que la proposición $42 \div 5 = n$ sea verdadera. Sabemos que no hay número entero tal que $5 \times n = 42$. No perdamos de vista que si tenemos 5 elementos podemos disponerlos en un arreglo de 5 renglones de 1 elemento cada uno; si tenemos 10 elementos, el arreglo será de 5 renglones de 2 elementos cada uno, y así sucesivamente hasta el caso de tener 40 elementos; entonces el arreglo será de 5 renglones de 8 elementos cada uno; pero como tenemos 42 elementos, nos sobrarán 2; por tanto, tendremos un arreglo como el representado en la figura 10.

$$42 = (5 \times 8) + 2$$

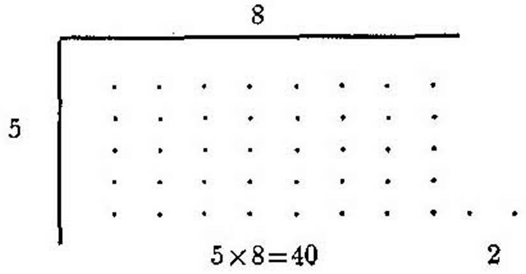


FIGURA 10

Supóngase que intentamos efectuar $98 \div 15$. Nos damos cuenta que podemos disponer 15 elementos colocando 1 en cada renglón de los 15 dispuestos, y nos sobrarán 83. Empleando otros 15 elementos volvemos a colocarlos igual, uno por cada uno de los 15 renglones (hemos dispuesto de 30 en total), y nos sobran 68. Continuando de esta manera, en el siguiente paso nos sobrarán 53, luego 38, después 23 y por último 8. Entonces, tenemos que

$$98 = (15 \times 6) + 8.$$

En otras palabras, cuando 98 se divide entre 15, el cociente es 6 y el residuo es 8.

Obsérvese que podemos considerar esta división como un proceso de sustracciones repetidas del número 15, partiendo del número 98.

$$
\begin{array}{rl}
98 & \\
-\ \underline{15} & \underline{\hspace{6em}}\ 1 \\
83 & \qquad 98=(15\times 1)+83 \\
-\ \underline{15} & \underline{\hspace{6em}}\ 1 \\
68 & \qquad 98=(15\times 2)+68 \\
-\ \underline{15} & \underline{\hspace{6em}}\ 1 \\
53 & \qquad 98=(15\times 3)+53 \\
-\ \underline{15} & \underline{\hspace{6em}}\ 1 \\
38 & \qquad 98=(15\times 4)+38 \\
-\ \underline{15} & \underline{\hspace{6em}}\ 1 \\
23 & \qquad 98=(15\times 5)+23 \\
-\ \underline{15} & \underline{\hspace{6em}}\ 1 \\
8 & \qquad 98=(15\times 6)+8.
\end{array}
$$

Éste, desde luego, es el proceso de sustracción repetida para obtener la división.

En vez de efectuar esta sustracción repetida del número 15, averiguamos cuál es el mayor múltiplo de 15 que pueda restarse de 98.

Si suponemos que es 7, encontramos que $7\times 15=105$, y no podemos restar 105 de 98. Si suponemos que es 5, tenemos que $5\times 15=75$

$$
\begin{aligned}
98 &= 75+23 \\
&= (15\times 5)+23.
\end{aligned}
$$

Pero $23>15$ por lo que podemos escribir:

$$
\begin{aligned}
98 &= (15\times 5)+[(15\times 1)+8] \\
&= [(15\times 5)+(15\times 1)]+8 \\
&= (15\times 6)+8
\end{aligned}
$$

Esta forma del algoritmo de la división puede parecer poco conocido. La forma vertical que se muestra a continuación es más corriente.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \ \ 6 \\
\hline
15 & \ 98 \\
 & \ \underline{90}\leftarrow(15\times 6) \qquad 98=(15\times 6)+8 \\
 & \ \ 8
\end{array}
$$

Consideremos la división indicada por 4 387 ÷ 32. ¿Qué múltiplo de 32 puede restarse de 4 387? La respuesta es, cualquier múltiplo no mayor que 4 387. Generalmente consideramos primero los productos de dicho número por 10, 100 ó 1 000 y así sucesivamente, porque estos productos pueden encontrarse fácilmente. Vemos primero que 32 × 100 igual a 3 200, que es menor que 4 387. Puesto que 32 × 100 puede restarse de 4 387 tenemos como resultado 1 187. ¿Puede restarse 32 × 100 nuevamente? Es obvio que no se puede, porque 3 200 es mayor que 1 187. Ahora emplearemos los productos 32 × 10 y 32 × 1. Restamos 32 × 10 tantas veces como sea posible, antes de restar 32 × 1.

32/ 4 387	
3 200	32 × 100
1 187	
320	32 × 10
867	
320	32 × 10
547	
320	32 × 10
227	
32	32 × 1
195	
32	32 × 1
163	
32	32 × 1
131	
32	32 × 1
99	
32	32 × 1
67	
32	32 × 1
35	
32	32 × 1
3	32 × 137

Entonces,

$$
\begin{aligned}
4\,387 &= [(32\times 100)+(32\times 10)+(32\times 10)+(32\times 10)+(32\times 1)+\\
&\quad (32\times 1)+(32\times 1)+(32\times 1)+(32\times 1)+(32\times 1)+(32\times 1)]+3\\
&= 32\times[100+10+10+10+1+1+1+1+1+1+1]+3\\
&= (32\times 137)+3.
\end{aligned}
$$

Procedamos ahora de un modo más conocido.

$$32\overline{/\ 4\,387}$$

Vemos que $32\times 1\,000=32\,000$, es un múltiplo muy grande de 32 y que 32×100 que es igual a 3 200 es el múltiplo básico (más adecuado) que podemos emplear. Ahora, ¿cuál es el mayor múltiplo de 3 200 que puede restarse de 4 387? Obsérvese que:

$$
\begin{aligned}
1\times 3\,200 &= 3\,200,\\
2\times 3\,200 &= 6\,400.
\end{aligned}
$$

Puesto que 6 400 es muy grande, entonces el mayor múltiplo de 3 200 que podemos restar de 4 387 es $(1\times 3\,200)$ y el residuo es 1 187.

$$
\begin{array}{rll}
 & 1 & \\
32/ & \overline{4\,387} & \\
 & 3\,200 = 32\times 100 & \qquad 4\,387 = (32\times 100) + 1\,187\\
\hline
 & 1\,187 &
\end{array}
$$

El siguiente múltiplo básico es $32\times 10=320$. Ahora,

$$
\begin{aligned}
1\times 320 &= 320,\\
2\times 320 &= 640,\\
3\times 320 &= 960,\\
4\times 320 &= 1\,280.
\end{aligned}
$$

El mayor múltiplo de 320 que podemos restar de 1 187 es 3×320. El residuo es 227 (puesto que el divisor es 32, escribimos 3×320 como 32×30.)

$$
\begin{array}{rll}
 & 13 & \\
32/ & \overline{4\,387} & \\
 & 3\,200 & \\
\hline
 & 1\,187 & \\
 & 960 = 32\times 30 & \qquad 1\,187 = (32\times 30) + 227\\
\hline
 & 227 &
\end{array}
$$

Ahora,

$$
\begin{aligned}
1\times 32 &= 32,\\
2\times 32 &= 64,\\
3\times 32 &= 96,\\
4\times 32 &= 128,\\
5\times 32 &= 160,\\
6\times 32 &= 192,\\
7\times 32 &= 224,\\
8\times 32 &= 256.
\end{aligned}
$$

El mayor múltiplo de 32 que podemos restar de 227 es $7\times 32=224$.

$$
\begin{array}{rrl}
 & 137 & \\
32/ & \overline{4\,387} & \\
 & \underline{3\,200} & \\
 & 1\,187 & \\
 & \underline{960} & \\
 & 227 & \\
 & \underline{224} & =32\times 7 \\
 & 3 & \qquad\qquad 227=(32\times 7)+3
\end{array}
$$

El residuo 3 es menor que 32. El cociente es

$$100+30+7=137$$

Entonces,

$$4\,387=(137\times 32)+3.$$

Empleando la forma conocida de la división tenemos:

$$
\begin{array}{rrll}
 & 137 & & \\
32/ & \overline{4\,387} & & \\
 & \underline{3\,200} & =32\times 100 & \\
 & 1\,187 & & 4\,387=(32\times 100)+1\,187 \\
 & \underline{960} & =32\times 30 & \\
 & 227 & & 4\,387=(32\times 100)+(32\times 30)+227 \\
 & \underline{224} & =32\times 7 & \\
 & 3 & & 4\,387=(32\times 100)+(32\times 30)+(32\times 7)+3.
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Así, } 4\,387 &= (32\times 100) + 1\,187 \\
&= (32\times 100) + [(32\times 30) + 227] \\
&= [(32\times 100) + (32\times 30)] + 227 && \text{Propiedad asociativa} \\
&= [32\times (100+30)] + 227 && \text{Propiedad distributiva} \\
&= (32\times 130) + 227 \\
&= (32\times 130) + [(32\times 7) + 3] \\
&= [(32\times 130) + (32\times 7)] + 3 && \text{Propiedad asociativa} \\
&= [32\times (130+7)] + 3 && \text{Propiedad distributiva} \\
&= (32\times 137) + 3.
\end{aligned}
$$

Al enseñar el algoritmo de la división es muy importante arraigar la idea del múltiplo básico porque, entre otras cosas, da significado a la posición de los dígitos en el cociente.

Veamos nuestro problema de división, ejecutado en la forma usual, y examinémoslo por partes, veremos que cada paso del cálculo comprende los múltiplos básicos. El cociente se calcula primero; pues para la explicación es necesario que analicemos el proceso completo. Ordinariamente no daríamos a los niños esta explicación, pero la incluimos aquí para ilustrar que es lo que realmente sucede en la forma familiar del algoritmo de la división.

$$
\begin{array}{r@{}r}
 & 137 \\
32\,/ & \overline{4\,387} \\
 & 3\,200 \\
\hline
 & 1\,187 \\
 & 960 \\
\hline
 & 227 \\
 & 224 \\
\hline
 & 3
\end{array}
$$

Observe que:

$$
\begin{aligned}
4\,387 &= 3\,200 + 960 + 224 + 3 \\
&= (32\times 100) + (32\times 30) + (32\times 7) + 3 \\
&= [32\times (100+30+7)] + 3 \\
&= (32\times 137) + 3.
\end{aligned}
$$

Las primeras veces que se plantea la división, su algoritmo resulta difícil de entender. Al enseñarlo, es útil escribir el resultado de una división en la forma $a = (b\times q) + r$. Por ejemplo, en el problema $74 \div 8$ podemos escribir el cálculo de la manera usual,

$$\begin{array}{r} 9 \\ 8\overline{)\ 74} \\ \underline{72} \\ 2 \end{array}$$

y después volver a escribir el resultado en la forma

$$74 = (8 \times 9) + 2$$

Para preparar a los niños en la división de números grandes, se requiere de tiempo para que trabajen con múltiplos de 10, 100 y 1 000, ya que la colocación del numeral en el cociente, no implica sólo conjeturas sino más bien la comprensión clara de cuál es el múltiplo básico que en particular se está empleando en cada paso del cálculo. Insistir en la estimación de productos, para el desarrollo del discernimiento sobre la correcta o incorrecta solución de las divisiones, es un aspecto fundamental en la enseñanza de las divisiones grandes.

Para ver lo confuso que puede parecer al estudiante el manejo de divisiones grandes con numerales de base diez, debe intentarse el algoritmo, usando numerales en otra base; por ejemplo, numerales de base cuatro.

Grupo de ejercicios 4

Llene los espacios en blanco en el cuadro VI.

CUADRO VI

Par ordenado (a, b)	$a = (b \times q) + r$	q	r
1. (18, 7)	$18 = (7 \times 2) + 4$		
2. (29, 9)			
3. (59, 12)			
4. (127, 23)			
5. (300, 25)			

6. ¿Cuál es el mayor múltiplo de 48 que puede restarse de 9 835?

7. ¿Cuál es el mayor múltiplo de 96 que puede restarse de 12 307

RESPUESTAS A LOS GRUPOS DE EJERCICIOS

Grupo de ejercicios 1

1. Propiedad asociativa de la adición
2. Propiedad conmutativa de la adición
3. Propiedad conmutativa de la adición
4. 113_{cuatro}
5. 120_{cuatro}
6. 200_{cuatro}

Grupo de ejercicios 2

1. 11_{cuatro}
2. 13_{cuatro}
3. 113_{cuatro}
4. 11_{cuatro}
5. 101_{cuatro}

Grupo de ejercicios 3

1. Elemento idéntico de la multiplicación
2. Propiedad distributiva
3. Sumas básicas
4. Propiedad conmutativa de la multiplicación
5. Elemento idéntico de la multiplicación
6. Propiedad distributiva
7. Sumas básicas
8. Elemento idéntico de la multiplicación
9. Propiedad distributiva
10. Sumas básicas
11. Propiedad conmutativa de la multiplicación
12. Propiedad conmutativa de la multiplicación
13. Propiedad asociativa de la multiplicación
14. Propiedad conmutativa de la multiplicación
15. Propiedad conmutativa de la multiplicación
16. Propiedad distributiva
17. Propiedad conmutativa de la adición

Grupo de ejercicios 4

1.	2, 4	
2.	$29=(9\times3)+2$	3, 2
3.	$59=(12\times4)+11$	4, 11
4.	$127=(23\times5)+12$	5, 12
5.	$300=(25\times12)+0$	12, 0
6.	$204\times48=9\,792$	
7.	$128\times96=12\,288$	